ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE 1982

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

DEUXIÈME INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES (4 h)

NOTA : Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Rappel : Log désigne le logarithme népérien.

SUJET N° 1 –

Soit $F(x)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ par $F(x) = \int_0^{\pi/2} \text{Log}\,(x\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt$.

1/ Montrer que cette fonction est dérivable, de dérivée $F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{x\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt$.

2/ Calculer cette dernière intégrale.

3/ En déduire la valeur de $F(x)$.

4/ Pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$, calculer $G(a,b) = \int_0^{\pi/2} \text{Log}\,(a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t)\,dt$.

5/ En déduire la valeur des intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \text{Log}(\cos t)\,dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \text{Log}(\sin t)\,dt$$

SUJET N° 2 –

On se donne une série convergente à termes a_n tous strictements positifs, $n \geqslant 0$, et l'on appelle E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels.

1/ A tout couple $(P,Q) \in E^2$, on associe la série de terme général

$$u_n = \frac{a_n}{2^n} P(n)\,Q(n) \quad , \quad n \geqslant 0 .$$

Démontrer la convergence de cette série.

2/ Démontrer alors que l'expression

$$(P/Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} P(n)\,Q(n)$$

définit un produit scalaire sur E .

3/ Si l'on avait $a_n \geqslant 0$ pour tout n, au lieu de $a_n > 0$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite (a_n) afin que (P/Q) définisse encore un produit scalaire sur E .

4/ On suppose maintenant $a_n = 1$ pour tout $n \geqslant 0$, et l'on désigne par N_1 la norme associée au produit scalaire (P/Q) correspondant à cette suite particulière (a_n). Cette norme est-elle équivalente à la norme N_2 définie pour tout $P \in E$ par

$$N_2(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| \quad ?$$

.../...

SUJET N° 3 On définit pour tout entier $k \geqslant 0$ la série entière

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n ,$$

1/ Calculer son rayon de convergence.

2/ Mettre f_0, f_1, f_2 sous forme de fractions rationnelles.

3/ Plus généralement, prouver que

$$f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}} ,$$

où $P_k(x)$ est un certain polynôme de degré k. Donner une relation entre P_k, P'_k et P_{k+1} (P'_k est le dérivé de P_k).

4/ On appelle $A(k,j)$ les coefficients de $P_k(x)$; donc

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} A(k,j)\, x^j .$$

Établir une récurrence simple entre $A(k+1,j)$, $A(k,j-1)$ et $A(k,j)$.

5/ En déduire une table numérique des $A(k,j)$ pour $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant 8$. On affectera la lettre k aux lignes et la lettre j aux colonnes de cette table.

6/ Donner pour $A(k,j)$ une formule explicite.

SUJET N° 4 En axes rectangulaires (Ox,Oy), on considère l'arc (C_n) représenté pour tout entier $n \geqslant 1$, par l'équation

$$y = \cos^n x , \qquad x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] .$$

1/ Démontrer l'existence pour (C_n) d'un point d'inflexion I_n si $n \geqslant 2$. Déterminer la limite de la suite (I_n) pour $n \longrightarrow \infty$.

2/ Soit d_n la distance de l'origine O à l'arc (C_n) ; on a donc :

$$d_n^2 = \inf_{x \in [0,\frac{\pi}{2}]} f_n(x) , \quad \text{où} \quad f_n(x) = x^2 + \cos^{2n} x .$$

Calculer $\lambda = \lim_{n \to \infty} f_n(n^{-\frac{1}{4}})$.

3/ En déduire la valeur μ de $\lim_{n \to \infty} d_n$.

4/ Donner un équivalent simple de $d_n - \mu$, pour $n \longrightarrow \infty$.

SUJET N° 5 Soit Δ le carré $[0,1] \times [0,1]$ et f_n la suite de fonctions

$$f_n(x,y) = \frac{x^n y^n}{x+y} ,$$

où n est entier $\geqslant 1$ et $(x,y) \in \Delta$, avec $(x,y) \neq (0,0)$.

1/ Montrer l'existence et donner la valeur de

$$\ell = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in \Delta}} f_n(x,y) .$$

2/ Posant alors $f_n(0,0) = \ell$, on introduit :

$$u_n = \iint_{\Delta} f_n(x,y)\, dx\, dy .$$

Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3/ Calculer la valeur numérique de u_1 avec 5 décimales.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail